Prof. Dr. Ulrich Rüde, Marco Heisig, Jan Hönig

Algorithmik kontinuierlicher Systeme
Aufgabenblatt 10 — Optimierung

Übungsgruppe – bitte ankreuzen:
(für die Rückgabe)

T01	Mo	10:15 - 11:45	00.152-113	
T02	Mo	16:15 - 17:45	H3	
T03	Di	16:15 - 17:45	H10	
T04	Mi	08:15 - 09:45	R4.11	
T05	Mi	08:15 - 09:45	SR TM	
T06	Mi	10:15 - 11:45	00.152-113	
T07	Do	10:15 - 11:45	H2	
T08	Fr	12:15 - 13:45	02.133-113	

Nachname, Vorname | Matrikelnr. | Studiengang | Gruppe

Nachname, Vorname | Matrikelnr. | Studiengang | Gruppe

Allgemeines:
Bitte berücksichtigen Sie, dass **nur** Abgaben mit vollständig ausgefülltem und angeheftetem Deckblatt korrigiert und bewertet werden!
Die Abgabe der Theorieaufgaben erfolgt über den Abgabebriefkasten des Lehrstuhl Informatik 10 (Cauerstr. 11, EG, neben der Bibliothek TZNE)

— In jedem Fall am 10. Juli 2018 *vor* 10.15 Uhr! —

Aufgabe 1 — (Quadratisches Funktional, CG-Verfahren) (0 Punkte)

$\boldsymbol{A}$ sei eine symmetrisch positive definite Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{b}$ ein Vektor $\mathbb{R}^n$ und c aus $\mathbb{R}$. Man betrachte das quadratische Funktional auf $\mathbb{R}^n$:

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + 2\cdot\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{x} + c$$

a) Bestimmen Sie zu gegebenem Startvektor $\boldsymbol{x}_0$ und Suchrichtung $\boldsymbol{s}_0$ die optimale Schrittweite τ für das Abstiegsverfahren. D.h. die Stelle an der die Funktion $q(\tau) = Q(\boldsymbol{x}_0 + \tau\cdot\boldsymbol{s}_0)$ minimal wird.
Hinweis: $q(\tau)$ ist eine Parabel
Im folgenden sei $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}4 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$, $c = 2$ und der Startwert $\boldsymbol{x}_0 = [-1,2]^T$.

b) Bestimmmen Sie den Gradienten $\nabla Q(\boldsymbol{x}_0)$, die Suchrichtung $\boldsymbol{s}_0$ und die optimale Schrittweite für den Gradientenabstieg durch Verwendung des Ergebnisses aus a).

c) Führen Sie den ersten Schritt des Gradientenverfahrens durch (Ergebnis $\boldsymbol{x}_1$).

d) Führen Sie einen weiteren Schritt des Gradientenverfahrens durch (wiederrum unter Verwendung der optimalen Schrittweite).

e) Bestimmen Sie einen A-konjugierten Vektor zu $\boldsymbol{s}_0$ aus b).

f) Führen Sie zwei Schritte des CG-Verfahrens mit Startpunkt $\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{s}_0$ von Teil b) durch. Warum sollte $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{b} = 0$ sein?

Aufgabe 2 — Iterative Verfahren (8 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 1\\0 & -6 & 3 & 2\\1 & 0 & -2 & 0\\1 & -2 & 0 & 4\end{bmatrix}.$$

Konvergiert das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für ein lineares Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit beliebiger rechter Seite $\boldsymbol{b}$?

b) Führen Sie jeweils einen Iterationsschritt aus für das Jacobi-Verfahren, für das Gauß-Seidel-Verfahren und für das SOR-Verfahren mit $\omega = 1.5$ durch, um das Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zu lösen. Benutzen Sie jeweils den Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = [1,1,1,1]^T$ und die rechte Seite $\boldsymbol{b} = [2,3,1,4]^T$.

c) Gegeben sei die Matrix $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}1 & 0.5 & 0\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$. Stellen Sie die Iterationsmatrix für das Jacobi-Verfahren auf und zeigen Sie durch den Spektralradius, dass das Jacobi-Verfahren konvergiert.

Aufgabe 3 — Abstiegsverfahren (7 Punkte)

Die Zielfunktion $f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 1$ soll mit einem Abstiegsverfahren minimiert werden.

a) Das Gradientenverfahren ist über die folgende Iterationsvorschrift definiert:

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{x}_i - t \cdot \nabla f(\boldsymbol{x}_i)$$

Führen Sie einen Schritt des Gradientenverfahrens mit Startwert $\boldsymbol{x}_0 = [1, 1]^T$ und Schrittweite $t = \frac{1}{2}$ durch.

b) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit Startwert $\boldsymbol{x}_0 = [1, 1]^T$ durch.

c) Skizzieren Sie die Ergebnisse aus a) und b) in ein Koordinatensystem. Konvergieren beide Verfahren, wenn das globale Minimum bei ca. $[2.43, 0.91]^T$ liegt?