Lehrstuhl für Systemsimulation

Sommersemester 2018

Prof. Dr. Ulrich Rüde, Marco Heisig, Jan Hönig

Algorithmik kontinuierlicher Systeme
Aufgabenblatt 8 — Gleichungssysteme

Übungsgruppe – bitte ankreuzen:
(für die Rückgabe)

T01	Mo	10:15 - 11:45	00.152-113	
T02	Mo	16:15 - 17:45	H3	
T03	Di	16:15 - 17:45	H10	
T04	Mi	08:15 - 09:45	R4.11	
T05	Mi	08:15 - 09:45	SR TM	
T06	Mi	10:15 - 11:45	00.152-113	
T07	Do	10:15 - 11:45	H2	
T08	Fr	12:15 - 13:45	02.133-113	

________________ __________ __________ ________

Nachname, Vorname | Matrikelnr. | Studiengang | Gruppe

Nachname, Vorname | Matrikelnr. | Studiengang | Gruppe

Allgemeines:
Bitte berücksichtigen Sie, dass **nur** Abgaben mit vollständig ausgefülltem und angeheftetem Deckblatt korrigiert und bewertet werden!
Die Abgabe der Theorieaufgaben erfolgt über den Abgabebriefkasten des Lehrstuhl Informatik 10 (Cauerstr. 11, EG, neben der Bibliothek TZNE)

— In jedem Fall am 26. Juni 201 *vor* 10.15 Uhr! —

Aufgabe 1 — Matrixnorm und Konditionszahl (0 Punkte)

Gegeben seie ein lineares Gleichungssystem

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

b) Bestimmen Sie die Spaltensummennorm $||\cdot||_1$, die Zeilensummennorm $||\cdot||_\infty$, die Frobeniusnorm $||\cdot||_F$, die Spektralnorm $||\cdot||_2$ und die Konditionszahl $\kappa_2(\cdot)$ von $\boldsymbol{A}$.

c) Nun is die SVD von $\boldsymbol{A}$ bekannt: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^T \approx \begin{bmatrix} -0.914 & -0.404 \\ -0.404 & 0.914 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.464 & 0 \\ 0 & 0.365 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.576 & 0.817 \\ -0.817 & -0.576 \end{bmatrix}$ (drei Nachkommastellen genau). Bestimmen Sie die Frobeniusnorm $||\cdot||_F$, die Spektralnorm $||\cdot||_2$ und die Konditionszahl $\kappa_2(\cdot)$ von $\boldsymbol{A}$.

- $||\boldsymbol{A}||_F = \sqrt{\sum_i \sigma_i^2} \approx 5.477$
- $||\boldsymbol{A}||_2 = \sigma_1 = \sigma_{\max} \approx 5.464$
- $\kappa(\boldsymbol{A}) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}, r = |\{\sigma_i : \sigma_i > 0\}| \approx 14.933$ (Ungenauigkeit durch nur 3 Nachkommastellen)

d) Beweisen Sie dass die Pseudoinverse $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V\Sigma}^{-1}\boldsymbol{U}^T$ ist. Geben Sie für ein $\Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ das Σ^+ an.

Aufgabe 2 — Regressionsrechnung (8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für eine Matrix $\boldsymbol{A}$ mit vollem Rang, n Zeilen und m Spalten $(n > m)$ folgende Eigenschaften gelten, indem Sie sich die Singulärwertzerlegung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U\Sigma V}^T$ zu Nutze machen:

- $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ ist nicht singulär
- $\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1} \boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}^{\sim 1}$

b) Zeigen Sie, dass die Pseudoinverse $\boldsymbol{A}^{\sim 1}$ einer $n \times m$-Matrix $(n > m)$ mit vollem Rang die Normalengleichung $\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}$ erfüllt.

c) Gegeben seien die Punkte $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.
Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$ zu den gegebenen Punkten, indem Sie ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem aufstellen und dieses mit Hilfe der Pseudoinversen lösen.

d) Zeichnen Sie die Punkte und die Ausgleichsgerade aus c) in ein Diagramm. Tragen Sie außerdem noch die Distanzen der Punkte zur Ausgleichsgeraden ein, die durch diese minimiert werden.
Wie ändert sich die Ausgleichsgerade, wenn zusätzlich noch der Punkt $[0.5, 0.7]^T$ hinzugefügt wird (Rechnung nicht erforderlich)?

Aufgabe 3 — Hauptkomponentenanalyse – minimal umgebendes Rechteck (7 Punkte)

In dieser Aufgabe soll zu gegebenen Datenpunkten $P_i \in \mathbb{R}^2$ die PCA berechnet werden. Gegeben seien die folgenden Punkte: $P_0 = (-1, 1)^T$, $P_1 = (1, 1)^T$, $P_2 = (1, -1)^T$, $P_3 = (-2, -2)^T$, $P_4 = (2, 2)^T$

a) Berechnen Sie die zu den Datenpunkten P_i gehörige Kovarianzmatrix C.

b) Berechnen Sie die entsprechenden Hauptachsen (Eigenvektoren der Kovarianzmatrix).

c) Zeichnen Sie nun die Punkte P_i sowie deren Schwerpunkt in ein Diagramm. Zeichnen Sie zusätzlich in das Koordinatensystem ein, welches sein Zentrum im Schwerpunkt hat und dessen Koordinatenachsen die Richtungen der Hauptachsen sind. Skizzieren Sie schließlich ein minimal umgebendes Rechteck (Oriented Bounding Box) zu den Punkten P_i ein.