FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
TECHNISCHE FAKULTÄT

Algorithmik kontinuierlicher Systeme

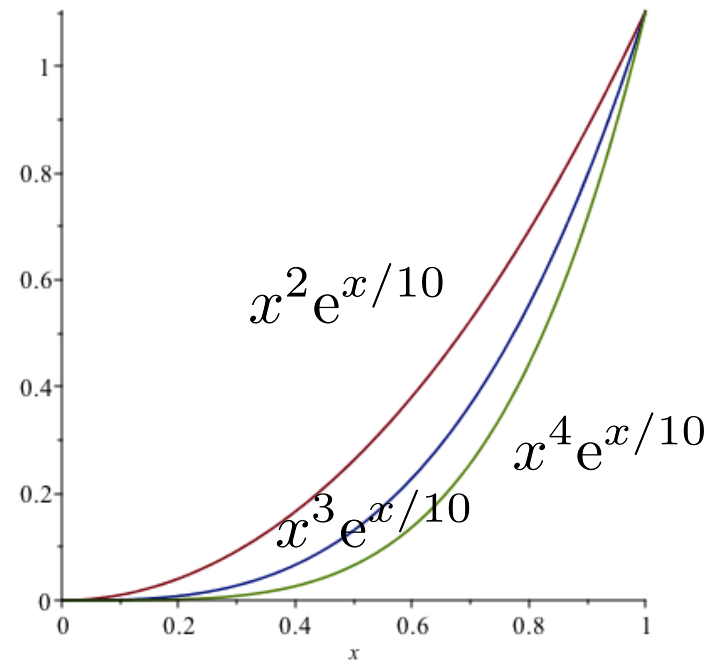
Einführungsvorlesung: Numerische Fehler

- Kontinuierliche Daten müssen diskretisiert/quantisiert werden:
  dies ist **immer mit Fehlern** verbunden
- Reelle Zahlen werden im Rechner durch Gleitpunkt-zahlen bzw. Maschinenzahlen approximiert.
  Dies ist **nicht exakt möglich** → Rundungsfehler
- Vorsicht ist geboten:
  - Welchen Einfluss haben Fehler in den Eingangsdaten?
  - Wo entstehen Fehler?
  - Fehlerfortpflanzung?
  - Wie kann man sie minimieren?

- Es **kann** zu (vollkommen) falschen Ergebnissen führen!

- Problem: Berechne

$$\int_0^1 x^4 e^{x/10} dx$$



- Aus einer Integrationstabelle für unbestimmte Integrale (z.B. Bronstein #450):

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n}{a} e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

- Wir definieren die (reellen) Werte des bestimmten Integrals:

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x/10} dx$$

- Wir verwenden die obige Formel (partielle Integration) und erhalten folgende Rekursionsformel

$$I_n = \frac{x^n}{1/10} e^{x/10} \Big|_0^1 - \frac{n}{1/10} \underbrace{\int_0^1 x^{n-1} e^{x/10}}_{=I_{n-1}}$$

$$= 10\, e^{1/10} - 10n\, I_{n-1}$$

- Unsere Aufgabe war die Berechnung von I_4
  Dafür haben wir jetzt eine Rekursionsformel:

$$I_0 = \int_0^1 e^{x/10} dx = \frac{1}{0.1} e^{0.1\,x} \Big|_0^1 = 10(e^{0.1} - 1) \approx 1.052...$$

$$I_n = 10\, e^{0.1} - 10n\, I_{n-1} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \cdots$$

- Diese Rekursionsformel verwenden wir jetzt, wobei wir mit drei Stellen Genauigkeit rechnen:

$$I_0 \approx 1.052;\ I_1 \approx 0.532;\ I_2 \approx 0.412;\ I_3 \approx -1.308;$$
$$I_4 \approx 63.372;\ I_5 \approx -3157.548;\ I_6 \approx 189463.932$$

- Die Ergebnisse können nicht stimmen!

Kritischer Wertevergleich

- Rekursiv bestimmte numerische Werte (Genauigkeit)

	Digits	4	8	12	16
n	I_{exact}				
0	1.0517091808	1.052	1.0517092	1.05170918076	1.05170918075648
1	0.5346173732	0.532	0.5346172	0.53461737316	0.53461737319175
2	0.3593617169	0.412	0.3593652	0.35936171756	0.35936171692215
3	0.2708576731	**-1.308**	0.2707532	0.27085765396	0.27085767309179
4	0.2174022571	**63.372**	0.2215812	0.21740302236	0.21740225708463
5	0.1815963238	**-3157**	**-0.0273508**	0.18155806276	0.18159632652467
6	0.1559297509	**$1.9 \cdot 10^5$**	**12.6927572**	0.15822541516	0.15592958927591
7	0.1366266164			**-0.02406988044**	0.13663793144235
8	0.1215798720			**12.97729961596**	0.12067466536799

Was läuft schief ?

- Die Ergebnisse können nicht stimmen
- Die Ergebnisse variieren stark, abhängig davon wie viele Stellen wir verwenden!
- Der Integrand erfüllt:

$$f(x) = x^n \cdot e^{0.1x} \geq 0 \quad \text{für} \quad x \in [0,1]$$

- deshalb muss $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$

Warum ist das passiert?

- Anstelle des korrekten I_0 haben wir mit einem gerundeten Wert gerechnet

$$\tilde{I}_0 = I_0 + \varepsilon$$

- ε ist der Rundungsfehler
- Typisch ist
- $\varepsilon \approx 10^{-8}$ (einfache Genauigkeit / single precision)
- $\varepsilon \approx 10^{-16}$ (doppelte Genauigkeit / double precision)

- in unserem Beispiel war $\varepsilon \approx 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-12}, 10^{-16}$

- Die Rekursion liefert nun

$$\tilde{I}_1 = 10 \cdot e^{0.1} - 10 \cdot \tilde{I}_0 = I_1 - 10\varepsilon$$

$$\tilde{I}_2 = 10 \cdot e^{0.1} - 20 \cdot \tilde{I}_1 = I_2 + 200\varepsilon$$

$$\tilde{I}_3 = 10 \cdot e^{0.1} - 30 \cdot \tilde{I}_2 = I_3 - 6000\varepsilon$$

$$\tilde{I}_4 = 10 \cdot e^{0.1} - 40 \cdot \tilde{I}_3 = I_4 + 240000\varepsilon$$

$$....$$

$$\tilde{I}_n - I_n = 10n \cdot (\tilde{I}_{n-1} - I_{n-1})$$

- Das gilt bei exakter Rechnung, ohne jeden weiteren Rundungsfehler
- Fehlerpropagation: Hier drastische Verstärkung!

Was kann man dagegen machen?

Rückwärtsiteration

- Die Iteration $I_n = 10 \cdot e^{0.1} - 10n \cdot I_{n-1}$ wird umgeformt zu $I_{n-1} = \dfrac{10 \cdot e^{0.1} - I_n}{10n}$ und man beginnt mit einem (grob) geschätzten Wert $\tilde{I}_{10}$
- Fehlerentwicklung:

$$\varepsilon_{10} = \tilde{I}_{10} - I_{10}$$

$$\varepsilon_9 = \tilde{I}_9 - I_9 = -\frac{\varepsilon_{10}}{10 \cdot 10};$$

$$\varepsilon_8 = \tilde{I}_8 - I_8 = -\frac{\varepsilon_9}{10 \cdot 9} = \frac{\varepsilon_{10}}{9000}$$

$$\varepsilon_7 = \tilde{I}_7 - I_7 = -\frac{\varepsilon_8}{10 \cdot 8} = -\frac{\varepsilon_{10}}{720000}$$

Rückwärts-Iteration

Wenn man die Iteration

$$I_n = 10 \cdot e^{0.1} - 10n \cdot I_{n-1}$$

umformt zu

$$I_{n-1} = \frac{10 \cdot e^{0.1} - I_n}{10n}$$

und mit einem grob geschätzten Werten I_{10} beginnt (z.B. **0.0** oder 1.0), erhält man die folgenden Werte

n	I_n	error	I_n	error
10	**0.0**	0.09964	**1.0**	0.90036
9	0.11051709	$1.1 \cdot 10^{-3}$	0.10051709	$1.0 \cdot 10^{-2}$
8	0.12156880	$1.1 \cdot 10^{-5}$	0.12167991	$1.0 \cdot 10^{-4}$
7	0.13662675	$1.4 \cdot 10^{-7}$	0.13662537	$1.3 \cdot 10^{-6}$
6	0.15592975	$2.0 \cdot 10^{-9}$	0.15592977	$1.8 \cdot 10^{-8}$
5	0.18159632	$3.3 \cdot 10^{-11}$	0.18159632	$3.0 \cdot 10^{-10}$
4	0 21740226	$6.6 \cdot 10^{-13}$	0.21740226	$6.0 \cdot 10^{-12}$
3	0.27085767	$1.6 \cdot 10^{-14}$	0.27085767	$1.5 \cdot 10^{-13}$
2	0.35936172		0.35936172	
1	0.53461737		0.53461737	
0	1.05170918		1.05170918	

Zwischenbilanz

- Die eingeschränkte Genauigkeit von Gleitpunktzahlen kann zu (vollständig) falschen Ergebnissen führen
- Es geht nicht nur um die Rundungsfehler, auch der **Fehler in Eingabedaten** kann verstärkt werden.

  Fast alle Daten aus der Realität haben (Mess-)Fehler. Auch wenn wir eine unbegrenzt genaue Arithmetik hätten, müssten wir vorsichtig sein.

- Algorithmen, die Fehler stark verstärken, heißen “instabil”.
  Algorithmen, die Fehler nicht verstärken, heißen “stabil”.

- Endliche Genauigkeit ist ein grundsätzliches Problem, das man nicht vermeiden kann, sondern nur lernen, damit umzugehen.

$$\int_0^1 x^n e^{x/10}\,dx =$$

$$(-1)^{1-n}\,10^{n+1}\Gamma\left(n+1\right)+\left(-1\right)^{-n}10^{n+1}n\Gamma\left(n,-1/10\right)+10\,e^{1/10}$$

- Gammafunktion (Fakultät), unvollständige Gammafunktion
- Für größeres n führt auch die symbolische Auswertung auf Schwierigkeiten, z.B.
- für n=10 entsteht der folgende Ausdruck, der auch mit doppelter Gleitpunktgenauigkeit nicht berechenbar ist:

$$-\,36288000000000000 + 32834740225688901\,0\,e^{1/10} \approx$$

$$-\,36288000000000000 + 36288000000000000.099639\ldots$$